الفصل الثالث

معادلات ماكسويل:

وجدنا سابقاً بعض الظواهر الفيزيائية التي لها علاقة بالشحنات الكهربائية الساكنة والتي تسبب مجال كهربائي مستقر او شحنات كهربائية متحركة بسرعة ثابتة (تيار مستمر) والتي ينشأ عنها مجال مغناطيسي مستقر. ووجدنا سابقاً ان

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad (1)$$

وسوف ندرس الآن ظواهر فيزيائية لها علاقة بالمجالات الكهربائية والمغناطيسية عندما تكون هذه المجالات متغيرة بالنسبة للزمن وسوف نجد ان العلاقة (1) لا تصبح صحيحة في صيغتها السابقة عند دراسة هذه المجالات الكهربائية والمغناطيسية.

- معادلات ماكسويل
ينص قانون الحث لفاراداي ان القوة الدافعة الكهربائية المحتثة (التحريضية) في دائرة تساوي التناقص الزمني للتدفق المغناطيسي الذي يقطع هذه الدائرة اي:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\varphi}{dt} \qquad (2)$$

كما ان القوة الدافعة (المحركة) الكهربائية المحتثة تساوي التكامل الخطي المغلق للمجال الكهربائي في تلك الدائرة

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (3)$$

ان معنى تغير التدفق المغناطيسي بالنسبة للزمن في قانون التحريض لفاراداي هو اما ان تتغير المساحة التي يقطعها المجال المغناطيسي بالنسبة للزمن او ان تتغير كثافة التدفق المغناطيسي $\vec{B}$ بالنسبة للزمن حيث ان $\varphi = \int_s \vec{B}\cdot d\vec{s}$.

فاذا كانت $\vec{B}$ هي المتغيرة بالنسبة للزمن (وهو ما سوف نأخذه في هذه الدراسة) فان قانون التحريض لفاراداي يكتب على النحو الآتي:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \qquad (4)$$

وذلك لان التفاضل بالنسبة للزمن ليست له علاقة بتغير السطح وبذلك نحصل على:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \qquad (5)$$

وباستعمال مبرهنة ستوك نحصل على:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_s \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \qquad (6)$$

وبما ان التكامل السطحي للطرفين متساوي نستنتج من ذلك ان

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (7)$$

تسمى هذه العلاقة بقانون التحريض لفاراداي في صيغته التفاضلية وهي اولى معادلات ماكسويل

نعلم سابقاً أن التكامل الخطي لكثافة الفيض المغناطيسي $\vec{B}$ حول مسار مغلق يساوي حاصل ضرب μ_0 في التيار الذي يحتويه المسار المغلق وهذا هو قانون أمبير وصيغته التكاملية هي:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_s \vec{J}\, ds$$

ويمكن كتابة هذا القانون بشكل آخر بعد استعمال مبرهنة ستوكس كما يلي:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_s \vec{J}\cdot d\vec{s}$$

ومنه نستنتج أن

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

وعندما نأخذ تفرق طرفي المعادلة الأخيرة نحصل على

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = 0$$

وذلك لأن تفرق أي دوار يساوي صفراً (متطابقة). وبالعودة إلى معادلة حفظ الشحنة $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ نستنتج أن $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. وقد كان ماكسويل هو أول من أكد [redacted] أن هذه الصيغة تصح فقط للمجالات المستقرة وهي لا تصح في حالة المجالات المتغيرة مع الزمن. لذلك اقترح ماكسويل إضافة حد آخر إلى قانون أمبير لكي يمكن استعماله في جميع الحالات. وقد افترض أن هذا الحد هو $\vec{\alpha}$ وبذلك نكتب قانون أمبير على النحو الآتي:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \vec{\alpha} \qquad (8)$$

وبالتالي:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B} - \vec{\alpha}) = -\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\vec{\alpha} = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$$

ولكن

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) = \nabla\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

حيث D هو متجه الإزاحة الكهربائي ([redacted] $D = \varepsilon E$).

إذن نستنتج مما تقدم أن

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{\alpha} \Rightarrow$$

$$\alpha = \mu_0 \frac{\partial D}{\partial t}$$

وباستعمال هذه العلاقة في المعادلة (8) نحصل على

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

أو أن

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (9)$$

حيث $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ و H هو المجال المغناطيسي).

إن إضافة الحد $\frac{\partial D}{\partial t}$ والذي سمي فيما بعد تيار الإزاحة يعد الإضافة الرئيسية التي ساهم بها ماكسويل في دراسة موضوع الكهربائية والمغناطيسية. ومعنى العلاقة الأخيرة

فإن المجال المغناطيسي لا ينشأ فقط من وجود تيار التوصيل الاعتيادي وإنما قد ينشأ عن وجود مجال كهربائي متغير كما هو الحال عند ما يتغير المجال الكهربائي بين لوحي مكثفة مستوية في حالة شحن هذه المكثفة وتفريغها أو ربطها بدائرة تيار متناوب تتغير فيه المجال الكهربائي بين لوحي المكثفة بصورة مستمرة. وتعد المعادلة (9) هي ثاني معادلات ماكسويل.

ولقد عرفنا سابقاً أن $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ وهذه تعد المعادلة الثالثة لماكسويل.

أما المعادلة الرابعة من معادلات ماكسويل فهي المعادلة التالية:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_f$$

حيث تمثل ρ_f كثافة الشحنة الحجمية للشحنات الحرة في وسط عازل ما. وبذلك يمكن كتابة معادلات ماكسويل كالآتي:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{\partial B}{\partial t} &&(a)\\
\vec{\nabla}\times\vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} &&(b)\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 &&(c)\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \rho_f &&(d)
\end{aligned} \qquad (10)$$

مع العلم أن $\vec{B} = \mu\vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ فإن ε و μ هما سماحية الوسط ونفاذيته.

- معادلة الموجة غير المتجانسة لكل من الجهد العددي Φ والجهد المتجهي $\vec{A}$.

عند التعامل مع مجالات كهربائية ومغناطيسية متغيرة مع الزمن فإننا لا يمكن أن نستعمل العلاقات الخاصة بالمجالات المستقرة لا سيما أن $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ لا يساوي صفراً وأن $\vec{\nabla}\times\vec{B}$ تختلف قيمته في حالة المجالات المتغيرة بالنسبة للزمن عما هو عليه في المجالات المستقرة.

وبما أن العلاقة $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ تصح في كل المجالات وأن تفرق دوران أي متجه يساوي صفراً، لذلك وكما بينا سابقاً يمكن أن نعرف المتجه $\vec{B}$ بدلالة الجهد المتجهي كالآتي:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

وعلى هذا الأساس يمكن أن نعرف المتجه $\vec{E}$ بدلالة كل من الجهد العددي والجهد المتجهي كالآتي:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial x} \qquad (11)$$

فإذا كانت $\vec{B}$ ثابتة القيمة فإن $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ يساوي صفراً أو أن $\vec{E} = -\nabla\Phi$ كما هو عليه الحال في الكهربائية المستقرة. أما إذا أخذنا دوران طرفي المعادلة (11) فإننا نحصل على معادلة ماكسويل الأولى كالآتي:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\Phi) - \nabla\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad (12)$$

وبما أن

$$\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{A} = \frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{وأن} \quad \nabla\times(\nabla\Phi) = 0$$

فإن المعادلة (12) تأخذ الشكل التالي الذي يمثل معادلة ماكسويل الأولى.

$$\nabla\times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$